УДК 531.396, 534.011

Обухов А. Н., Паламарчук В. А.

О ПОПЕРЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НИТИ В СРЕДЕ С СИЛОЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЮ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЕЁ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Развитие техники и технологии ставят перед исследователями ряд задач. Так, в связи с совершенствованием методов проектирования плавучих платформ, актуальным стало исследование поведение погруженного в жидкость троса [1, 2]. Эта задачи восходит к известной задаче Д. Бернулли [3] о колебаниях тяжелой нити с фиксированным закреплением одного конца. В работе [4] исследована задача о поперечном перемещении произвольного сечения весомой нити в случае, когда верхний конец $x = l$ перемещается горизонтально по заданному закону, без учёта рассеивания энергии колебания, что не отвечает реальному явлению.

Целью работы является решение задачи Д. Бернулли в случае, когда сила сопротивления движению произвольного сечения нити пропорциональна скорости перемещения с коэффициентом пропорциональности равным 2λ.

В этом случае математическую модель исследуемого процесса можно представить в виде дифференциального уравнения:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\lambda \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho g x \frac{\partial U}{\partial x}\right), \tag{1}$$

решение, которого удовлетворяет граничным условиям

$$U(x,t)\big|_{x=l} = f(t), \;\; U(x,t)\big|_{x=0} < \infty \tag{2}$$

и начальным условиям

$$U(x,t)\big|_{t=0} = 0, \;\; \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

где $U(x,t)$ – горизонтальное перемещение произвольного сечения x нити; ρ – плотность материала; g – ускорение свободного падения; l – длина нити, верхний конец которой $x = l$ закреплён; $f(t)$ – горизонтальное перемещение верхнего конца нити.

Решение поставленной задачи проведём, используя операционный метод. Применяя преобразование Лапласа [3] к дифференциальному уравнению (1) по переменной t, учитывая начальные (3) и граничные (2) условия, получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{d\overline{U}(x,p)}{dx}\right) = \frac{p^2 + 2\alpha p}{g}\overline{U}(x,p), \tag{4}$$

решение которого удовлетворяет граничным условиям

$$\overline{U}(x,p)\big|_{x=l} = \overline{F}(p), \quad \overline{U}(x,p)\big|_{x=0} < \infty. \tag{5}$$

Здесь

$$\overline{U}(x,p) = \int_0^\infty U(x,t)e^{-pt}dt, \quad \overline{F}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{6}$$

а $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho}$ $[c^{-1}]$.

Найдём общее решение уравнения (4), вводя новую переменную ξ, положив $\xi = \sqrt{x}$. Дифференциальное уравнение (4) можно записать в виде:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\overline{U}}{d\xi}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{p^2 + 2\alpha p}}{g}\right)^2 \xi\overline{U} = 0. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) можно записать в виде линейной комбинации

$$\overline{U}(\xi, p) = C_1 J_0\left(i \cdot 2\frac{\sqrt{p^2 + 2\alpha p}}{g}\xi\right) + C_2 Y_0\left(i \cdot 2\frac{\sqrt{p^2 + 2\alpha p}}{g}\xi\right). \quad (8)$$

Здесь $J_0(z), Y_0(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Перейдем в равенстве (8) к старой переменной:

$$\overline{U}(x, p) = C_1 J_0\left(i \cdot 2\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right) + C_2 Y_0\left(i \cdot 2\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \quad (8')$$

Так как при $x \to 0$, $Y_0(x) \to \infty$, то, учитывая ограниченность решения, найдем $C_2 = 0$. Из первого граничного условия (5) найдём C_1:

$$C_1 = \frac{\overline{F}(p)}{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\right)}. \quad (9)$$

Тогда изображение произвольного сечения нити можно записать формулой:

$$\overline{U}(x, p) = \overline{F}(p)\frac{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\right)}. \quad (10)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, искомое решение задачи можно записать в виде интеграла [4]:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\overline{F}(p)\frac{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\right)}e^{pt}dp, \quad t > 0. \quad (11)$$

Функция $\overline{U}(x, p)$ аналитическая, кроме полюсов $\overline{F}(p)$ и корней уравнения:

$$J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\right) = 0. \quad (12)$$

Найдем корни уравнения (12). Полагая:

$$\mu = i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}, \quad (13)$$

получим равенство $J_0(\mu) = 0$. Согласно [3] это уравнение имеет счетное множество корней:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < ... < \mu_k < ...., \quad k = 1,2,3,....n,....$$

симметричных относительно нуля. Тогда каждому корню μ_k отвечает пара комплексно сопряжённых корней уравнения (13), или

$$p^2 + 2\alpha p + \frac{g}{l}\frac{\mu_k^2}{4} = 0, \tag{13'}$$

$$p_k = -\alpha \pm i\omega_k, \quad \text{где} \qquad \omega_k = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{\mu_k^2}{4} - \alpha^2}, \quad k = 1,2,3,...n,... \tag{14}$$

Проанализируем в равенстве (14) собственную частоту $\omega_к$ k-й формы колебания весомой нити.

Если $\lambda < \rho\sqrt{\frac{g}{l}\frac{\mu_1}{2}}$, то в системе «весомая нить – среда» реализуется колебательный процесс по всем собственным формам колебаний нити, который будет носить затухающий характер. В случае, если

$$\rho\sqrt{\frac{g}{l}\frac{\mu_1}{2}} < \lambda \le \rho\sqrt{\frac{g}{l}\frac{\mu_{ê_1}}{2}}$$

в системе реализуется колебательный процесс, начиная с k_1-й формы, и будет носить затухающий характер. При этом относительные перемещения низших форм будут носить апериодический характер.

Заметим, что корни уравнения (12)однократные, их можно вычислить по формуле (14).

Используя теорию вычетов, интеграл (11) можно записать в виде

$$U(x,t) = \sum_{p_i} \operatorname*{Res}_{p_i} s\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right) \tag{15}$$

Здесь p_i – полюсы $\overline{F}(p)$ и корни уравнения (12), которые можно найти по формуле (14).

$$\operatorname*{Res}_{p_i} s\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right) = \lim_{p \to p_i} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left(\overline{U}(x,p)(p-p_i)^r e^{pt}\right), \tag{16}$$

где r – кратность корня p_i.

Таким образом, перемещение произвольного сечения весомой нити в среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости перемещения, можно найти по формуле [5]:

$$U(x,t) = \sum_{p_i} \operatorname*{Res}_{p_i} s\left(\overline{F}(p)\frac{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i \cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2 + 2\alpha p}\right)}\right)e^{pt}. \tag{17}$$

Рассмотрим частные случаи горизонтального перемещения верхнего конца нити.

а) Пусть верхний конец нити движется с постоянной скоростью V_0. Тогда закон перемещения принимаем в виде:

$$f(t) = V_0 t \tag{18}$$

Изображение $f(t)$ запишем как

$$\overline{F}(p) = V_0 \frac{1}{p^2} \tag{19}$$

Полюс $\overline{F}(p)$, $p = 0$ имеет кратность $r = 2$.

Найдем вычеты выражения:

$$\overline{U}(x,p)=\frac{V_0 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{x}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)} \tag{19'}$$

в полюсах $p=0$, $p=-\alpha\pm i\omega_k \quad k=1,2,3...$

1) $p=0$, кратность $r=2$.

$$\operatorname*{Res}_{p=0} s\frac{V_0 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0(\mu(p))}e^{pt}=V_0\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(\frac{J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0(\mu(p))}e^{pt}\right)=$$

$$=V_0 t+V_0\lim_{p\to 0}\frac{J_0{'}_p\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot J_0(\mu(p))-J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot J_0{'}_p(\mu(p))}{J_0^{\,2}(\mu(p))} \tag{20}$$

Заметим [3]

$$J_0\left(i\cdot 2\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{g}}\right)=1-\frac{x}{g}\left(p^2+2\alpha p\right)+\left(\frac{x}{g}\right)^2\left(p^2+2\alpha p\right)^2\frac{1}{4}-... \tag{21}$$

Тогда

$$J'_{0p}\left(i\cdot 2\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{g}}\right)=-\frac{x}{g}(p+\alpha)+\left(\frac{x}{g}\right)^2\left(p^2+2\alpha p\right)(p+\alpha)-... \tag{22}$$

Учитывая (21), (22), выражение (20) можно записать в виде:

$$\operatorname*{Res}_{p=0} s\frac{V_0 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0(\mu(p))}e^{pt}=V_0\left(t-\frac{2\alpha l}{g}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right). \tag{23}$$

2) $p_k=-\alpha+i\omega_k \quad k=1,2,3...n,...$

$$\operatorname*{Res}_{p=-\alpha+i\omega_k} s\frac{V_0 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0(\mu(p))}e^{pt}=V_0\lim_{p\to p_k}\left(\frac{J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\frac{d}{dp}J_0(\mu(p))p^2}e^{pt}\right). \tag{24}$$

Вычислим

$$p^2\frac{d}{dp}\left(J_0(\mu(p))\right)\Big|_{p=-\alpha+i\omega_k}=4\frac{l}{g}\sqrt{\left(\omega_k^2+\alpha^2\right)^2}e^{i\psi_k}\frac{\omega_k}{\mu_k}J_1(\mu_k)=4\frac{l}{g}\frac{\omega_k}{\mu_k}\left(\frac{g}{l}\right)e^{i\psi_k}\frac{\mu_k^2}{2}J_1(\mu_k)=$$

$$=\omega_k\mu_k e^{i\psi_k}J_1(\mu_k). \tag{25}$$

Учитывая (25), выражение (24) примет вид

$$\operatorname*{Res}_{p=-\alpha+i\omega_k} \frac{V_0 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0(\mu(p))} e^{pt} = V_0\left(\frac{(\cos(\omega_k t-\psi_k)+i\sin(\omega_k t-\psi_k))e^{-\alpha t}}{\omega_k \mu_k J_1(\mu_k)} J_0\left(\mu_л \sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right). \tag{26}$$

Так как

$$\operatorname*{Res}_{p=-\alpha+i\omega_л} s\overline{U}e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-\alpha-i\omega_k} s\overline{U}e^{pt} = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=-\alpha+i\omega_л} s\overline{U}e^{pt}\right) = 2V_0 \frac{\cos(\omega_k t-\psi_k)e^{-\alpha t}}{\mu_k \omega_k J_1(\mu_k)} J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right), \tag{27}$$

поперечное перемещение произвольного сечения нити, т. е. выражение (17) с учётом равенств (23) и (27) запишем в виде:

$$U(x,t) = V_0\left(t - \frac{2\alpha l}{g}\left(1-\frac{x}{l}\right) + 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(\omega_k t-\psi_k)e^{-\alpha t}}{\mu_k^2\sqrt{1-\frac{4\alpha l}{g\mu_k}}J_1(\mu_k)} J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right). \tag{28}$$

Здесь $\psi_k = arctg\dfrac{\alpha^2-\omega_k^2}{2\alpha\omega_k}, \quad k = 1,2,3.....n,...,$ (29)

$J_1(\mu_k)$ – значение функции Бесселя первого рода первого порядка.

Анализ выражения (28) показывает, что поперечное перемещение произвольного сечения нити в среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости перемещения, является сложным движением. Его переносная составляющая характеризуется первыми двумя слагаемыми, т. е. каждая точка нити движется поступательно со скоростью V_0, относительная составляющая представляет собой затухающие колебания. По достижению достаточно большого промежутка времени перемещение произвольного сечения нити примет вид:

$$U(x,t) = V_0\left(t - \frac{2\alpha l}{g}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right). \tag{30}$$

б) Пусть $f(t) = \Delta\sin\omega t$, тогда $\overline{F}(p) = \dfrac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}$.

В этом случае выражение (10) имеет вид:

$$\overline{U}(x,p) = \frac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}\frac{J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0(\mu(p))}. \tag{31}$$

Найдем вычеты выражения (31) в полюсах $p = \pm i\omega$, $p_k = -\alpha \pm i\omega_k$, $\quad k = 1,2,3......$

1) $p = \pm i\omega$

$$\operatorname*{Res}_{p=i\omega} \frac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}\frac{J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0(\mu(p))} = \lim_{p\to i\omega}\frac{\Delta\omega}{p+i\omega}\frac{J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0(\mu(p))} = \frac{\Delta}{2}\frac{J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{i\cdot J_0(\mu(i\omega))}e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{\Delta}{2}\frac{J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{i\cdot J_0(\mu(i\omega))}e^{i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{32}$$

Учитывая, что

$$J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)=\operatorname{Re}J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+i\operatorname{Im}J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right);$$

$$J_0\left(\mu\left(-i\omega\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right)=\operatorname{Re}J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)-i\operatorname{Im}J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \quad (33)$$

Выражение (32) с учётом соотношений (33) можно записать в виде

$$\operatorname*{Re}_{p=i\omega}s\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\Delta}{2}\frac{J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))}{\left|J_0(\mu(i\omega))\right|^2}e^{i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\Delta}{2}\left\{\frac{\operatorname{Re}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))\right)\sin\omega t+\operatorname{Im}\left(\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))\right)\cos\omega t}{\left|J_0(\mu(i\omega))\right|^2}\right\}+$$

$$+\frac{\Delta}{2}\left\{\frac{i\cdot\left(\operatorname{Im}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))\right)\sin\omega t-\operatorname{Re}\left(\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))\right)\cos\omega t\right)}{\left|J_0(\mu(i\omega))\right|^2}\right\}. \quad (34)$$

Тогда

$$\operatorname*{Re}_{p=i\omega}s\overline{U}e^{pt}+\operatorname*{Re}_{p=-i\omega}s\overline{U}e^{pt}=2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Re}_{p=i\omega}s\overline{U}e^{pt}\right)=$$

$$=\Delta\left\{\frac{\operatorname{Re}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))\right)\sin\omega t+\operatorname{Im}\left(\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot\overline{J}_0(\mu(i\omega))\right)\cos\omega t}{\left|J_0(\mu(i\omega))\right|^2}\right\}. \quad (35)$$

2) $p_k=-\alpha+i\omega_k \quad k=1,2,3...n,...$

$$\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_k}s\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\Delta\omega\lim_{p\to-\alpha+i\omega}\frac{J_0\left(i\cdot\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)e^{pt}}{\left(p^2+\omega^2\right)\frac{d}{dp}J_0(i\cdot\mu(p))}. \quad (36)$$

После несложных алгебраических преобразований, найдём

$$\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_k}s\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\Delta}{2}\sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}\frac{\left(\sin(\omega_k t-\psi_k)-i\cos(\omega_k t-\psi_k)\right)e^{-\alpha t}}{\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2-1\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{4l\alpha^2}{g\mu_k^2}}J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \quad (37)$$

Здесь

$$\psi_k=arctg\frac{\omega_k+\omega}{-\alpha}+arctg\frac{\omega_k-\omega}{-\alpha},\quad k=0,1,2... \quad (38)$$

Тогда

$$\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_л}s\overline{U}e^{pt}+\operatorname*{Re}_{p=-\alpha-i\omega_k}s\overline{U}e^{pt}=2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_л}s\overline{U}e^{pt}\right)=$$

$$= \Delta\sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}\,\frac{\left(\sin\left(\omega_k t-\psi_k\right)\right)e^{-\alpha t}}{\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2-1\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{4l\alpha^2}{g\mu_k^2}}J_1\left(\mu_k\right)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \qquad (39)$$

Искомое решение, выражение (17) с учётом равенств (35) и (39), можно записать в виде:

$$U(x,t)=\Delta\left\{\frac{\mathrm{Re}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right)}{\left|\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right|^2}\sin\omega t+\frac{\mathrm{Im}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right)}{\left|\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right|^2}\cos\omega t+\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\omega_k t-\psi_k\right)e^{-\alpha t}}{\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2-1\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{4l\alpha^2}{g\mu_k^2}}J_1\left(\mu_k\right)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right\}. \qquad (40)$$

Анализируя полученное решение (40), можно отметить, что при условии $\omega=\omega_{k_1}$ (явление резонанса) происходит возбуждение k_1 – формы с ограниченной амплитудой колебания, с течением времени относительное перемещение произвольного сечения нити затухают и все точки будут участвовать в переносном движении, представляющим собой гармонические колебания с частотой ω и амплитудой $A(x)$, зависящей от x-сечения нити, изменяющейся по закону:

$$A(x)=\frac{\left|J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right|^2}{\left|\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right|^2}. \qquad (41)$$

Используя начальные условия, получим разложения функций: в функциональные ряды по системе $\left\{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right\}$ на интервале $x\in(0;l)$, где μ_k – корни уравнения $J_0\left(\mu_k\right)=0$ [3].

$U(x,0)=0.$

$$\frac{\mathrm{Im}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right)}{\left|J_0\left(\mu(i\omega)\right)\right|^2}=\sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\psi_k\cdot J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2-1\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\sqrt{1-4\frac{l\alpha^2}{g\mu_k^2}}J_1\left(\mu_k\right)} \qquad (42)$$

$\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

$$\frac{\mathrm{Re}\left(J_0\left(\mu(i\omega)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\bar{J}_0\left(\mu(i\omega)\right)\right)}{\left|J_0\left(\mu(i\omega)\right)\right|^2}=-\sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{\omega}\sin\psi_k+\frac{\omega_k}{\omega}\cos\psi_k\right)\cdot J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2-1\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\sqrt{1-4\frac{l\alpha^2}{g\mu_k^2}}J_1\left(\mu_k\right)} \qquad (43)$$

в) Пусть

$$f(t)=\Delta\left(1-e^{-\beta t}\right)^2. \qquad (44)$$

Тогда

$$\bar{F}(p)=\frac{2\beta^2\Delta}{p(p+\beta)(p+2\beta)},$$

и

$$U(x,p)=\frac{2\Delta\beta^2}{p(p+\beta)(p+2\beta)}\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}. \qquad (45)$$

Полюсы $U(x,p)$ однократные:

$$p=0;\quad p=-\beta;\quad p=-2\beta;\quad p_k=-\alpha\pm i\omega_k,\quad k=1,2,3.....n$$

Вычислим вычеты $U(x,p)$ в полюсах

1) $p=0$.

$$\operatorname*{Re}_{p=0}s\,\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to 0}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+\beta)(p+2\beta)J_0(\mu(p))}e^{pt}=\Delta. \qquad (45')$$

2) $p=-\beta$.

$$\operatorname*{Re}_{p=-\beta}s\,\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to-\beta}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+2\beta)\cdot p\cdot J_0(\mu(p))}e^{pt}=-2\Delta\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\beta^2-2\beta\alpha}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\beta^2-2\beta\alpha}\right)}e^{-\beta t}. \qquad (46)$$

3) $p=-2\beta$.

$$\operatorname*{Re}_{p=-2\beta}s\,\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to-2\beta}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+\beta)\cdot p\cdot J_0(\mu(p))}e^{pt}=\Delta\frac{I_0\left(4\sqrt{\frac{l}{g}(\beta^2-\beta\alpha)}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(4\sqrt{\frac{l}{g}(\beta^2-\beta\alpha)}\right)}e^{-2\beta t}. \qquad (47)$$

Здесь, при условии $\beta>2\alpha$, $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

4) $p_k=-\alpha+i\omega_k$.

$$\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_k}s\,\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to-\alpha+i\omega_k}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(\mu(p)\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+\beta)\cdot(p+2\beta)\cdot p\cdot\frac{\partial}{\partial p}(J_0(\mu(p)))}e^{pt}=$$

$$=\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{i\omega_k t}}{(\beta-\alpha+i\omega_k t)\cdot(2\beta-\alpha+i\omega_k t)\cdot(-\alpha+i\omega_k t)\cdot i\cdot 4\frac{l}{g}\frac{\omega_k}{\mu_k}J_1(\mu_k)e^{i\psi_k}}=$$

$$=-2\frac{\Delta}{4}\beta^2\frac{g}{l}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{i\omega_k t}}{\sqrt{\omega_k^2\left(\omega_k^2+(\beta-\alpha)^2\right)\left(\omega_k^2+(2\beta-\alpha)^2\right)}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}J_1(\mu_k)e^{i\psi_k}}=$$

$$=-\Delta\beta^2\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{i(\omega_k t-\psi_k)}}{\sqrt{\omega_k^2\left(\omega_k^2+(\beta-\alpha)^2\right)\left(\omega_k^2+(2\beta-\alpha)^2\right)}J_1(\mu_k)}=$$

$$=-\Delta\beta^2\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos((\omega_k t-\psi_k)+i\sin((\omega_k t-\psi_k)))}{\sqrt{\omega_k^2\left(\omega_k^2+(\beta-\alpha)^2\right)\left(\omega_k^2+(2\beta-\alpha)^2\right)}J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \qquad (48)$$

Здесь $\psi_k=arctg\,\frac{\alpha}{\omega_k}+arctg\,\frac{\omega_k}{\beta-\alpha}+arctg\,\frac{\omega_k}{2\beta-\alpha},\quad k=0,1,2...$ (49)

Учитывая равенство (48), найдем

Тогда

$$\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_л} s\overline{U}e^{pt} + \operatorname*{Re}_{p=-\alpha-i\omega_k} s\overline{U}e^{pt} = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Re}_{p=-\alpha+i\omega_л} s\overline{U}e^{pt}\right) =$$

$$= -2\Delta\beta^2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega_k t-\psi_k)}{\sqrt{\omega_k^2\left(\omega_k^2+(\beta-\alpha)^2\right)\left(\omega_k^2+(2\beta-\alpha)^2\right)}J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \tag{50}$$

Поперечное перемещение произвольного сечения нити в рассмотренном случае, выражение (17) с учётом равенств (45')–(49), запишем в виде:

$$U(x,t) = \Delta\left[\left(1-2\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)}\right)}e^{-\beta t}+\frac{I_0\left(4\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(4\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)}\right)}e^{-2\beta t}\right)-\right.$$

$$\left.-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega_k t-\psi_k)}{\sqrt{\left(\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\omega_k}{\beta}\right)^2\right)\left(\left(2-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\omega_k}{\beta}\right)^2\right)}\sqrt{1-\frac{4\alpha^2 l}{g\mu_k^2}}\mu_k J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right]. \tag{51}$$

Анализ выражения (51) показывает, что поперечное перемещение произвольного сечения нити носит затухающий характер и с течением времени устанавливается, т. е. все точки переместятся на заданное расстояние Δ и нить займет новое равновесное прямолинейное положение. Если в равенствах (51) и (49) перейти к пределу при $\beta\to\infty$, что отвечает случаю мгновенного горизонтального перемещения верхнего конца нити на величину Δ, получим формулу для поперечного перемещения произвольного сечения нити, которое можно записать в виде выражения:

$$U(x,t) = \Delta\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega_k t-\psi_k)}{\sqrt{1-\frac{4\alpha^2 l}{g\mu_k^2}}\mu_k J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right]. \tag{52}$$

Здесь $\psi_k = arctg\dfrac{\alpha}{\omega_k}$.

Используя решение (51), и учитывая нулевые начальные условия, найдём разложение в функциональные ряды функций:

$$1-2\frac{I_0\left(z_1\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(z_1)}+\frac{I_0\left(z_2\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(z_2)} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\psi_k}{A_k}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right);$$

$$\frac{I_0\left(z_1\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(z_1)}-\frac{I_0\left(z_2\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(z_2)} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{\alpha}{\beta}\cos\psi_k+\frac{\omega_k}{\beta}\sin\psi_k}{A_k}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \tag{53}$$

Отсюда

$$\frac{I_0\left(z_2\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(z_2)} = 1 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\cos\psi_k + \frac{\omega_k}{\beta}\sin\psi_k}{A_k} J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right);$$

$$\frac{I_0\left(z_1\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(z_1)} = 1 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right)\cos\psi_k + \frac{\omega_k}{2\beta}\sin\psi_k}{A_k} J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \qquad (54)$$

здесь $z_1 = 2\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)}$, $z_2 = 4\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)}$.

$$A_k = \sqrt{\left(\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\beta}\right)^2\right)\left(\left(2-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\beta}\right)^2\right)}\sqrt{1-\frac{4\alpha^2 l}{g\mu_k^2}}\mu_k J_1(\mu_k). \qquad (55)$$

ψ_k можно определить по (49), а μ_k – корни уравнения $J_0(\mu_k) = 0$.

Заметим, что функциональные ряды (54) равномерно сходятся на интервале $x \in (0; l)$.

ВЫВОДЫ

В работе поставлена и решена задача о поперечных перемещениях весомой нити в среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости перемещения произвольного сечения, получен критерий реализации колебательного движения. Рассмотрены три возможных случая горизонтального перемещения верхнего конца нити, решения получены в виде функциональных рядов по системе функций Бесселя, равномерно сходящихся на интервале $x \in (0; l)$. Для практического использования полученных результатов достаточно ограничиться двумя – тремя членами разложения, при этом погрешность вычислений не превышает 10–15 %.Полученные результаты могут быть использованы в расчётных отделах проектных организаций, занимающихся проектированием плавучих платформ, большегрузных строительных и портальных кранов.

Особым математический интерес представляют собой выражения (42) и (43) – разложения действительной и мнимой части бесселевой функции первого рода нулевого порядка комплексного аргумента по системе функций $\left\{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right\}$, где μ_k – корни уравнения $J_0(\mu_k) = 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Behbahani-Nejad M. Freely propagating waves in elastic cables / M. Behbahani-Nejad, N. C. Perkins // Journal sound and vibration, 1996, vol. 196. –N 2. – P. 189–202.*
2. *Сухоруков А. Л. Исследование частот и форм собственных колебаний упругого погруженного в жидкость троса / А. Л. Сухоруков // Научно-техническая конференция ЦКБ МТ «Рубин». СПб, 2002. – С. 50–52.*
3. *Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.*
4. *Обухов А. Н. Поперечные перемещения подвешенной нити в случае, когда точка подвеса движется горизонтально по заданному закону / А. Н. Обухов, В. А. Паламарчук // Научный Вестник ДГМА. – 2014. –№ 1 (13Е). – С. 65–75.*
5. *Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Дёч – М. : Наука, 1971. – 288 с.*

Статья поступила в редакцию 18.11.2014 г.